Исследование устойчивости налоговых поступлений методами фрактального анализа

О.Ю.Урицкая

Аннотация

В работе проведен комплексный анализ структуры временных рядов налоговых поступлений в районах Санкт-Петербурга. Показано, что динамика поступлений обладает сложной структурой, включающей как периодические, так и случайные компоненты. С помощью спектрального метода, метода нормированного размаха и метода Херста выделены группы районов с низкой и высокой устойчивостью одномесячного периода налоговых отчислений. Исследована статистическая устойчивость среднего объема поступлений по методу Парето и выявлены районы с повышенной вероятностью внеплановых отчислений. Полученные данные свидетельствует о том, что за исследованный период времени структура городского бюджета находилась в стадии формирования, хотя и удовлетворяла основным критериям экономической самоорганизации.

Введение

Эффективность управления бюджетной системой тесно связана с возможностью прогноза ее поведения. Необходимость планирования и согласования доходной и расходной составляющих бюджета делает важной задачей определение устойчивости динамики налоговых поступлений на различных временных масштабах. Проблема прогноза легко разрешима, если процесс носит строго периодический характер, то есть в данном случае – когда известны сроки и объемы отчислений. Однако неустойчивая экономическая ситуация и специфика налоговой системы делают характер налоговых поступлений случайным, что не позволяет строить надежные прогнозы. Действительно, принципиально различный профиль предприятий, особенности производства, торговли, разобщенность планов препятствуют строгому планированию платежей и сроков их исполнения. С другой стороны, одна из характерных особенностей рыночной экономики и заключается в том, что ее составные элементы функционируют в определенной степени независимо друг от друга, что не исключает их тесное взаимодействие, обеспечиваемое товарообменом, денежными потоками и информацией [1]. Это позволяет рассматривать исходные временные ряды – доход и расход бюджета, как параметры функционирования целой экономической системы.

Городская бюджетная структура на уровне районов, каждый из которых включает десятки больших и малых предприятий, действующих по законам рынка и вносящим свой вклад в районный и муниципальный бюджет, представляет собой сложную систему, которая с формальной точки зрения может быть отнесена к категории больших интерактивных систем (БИС) [2]. Вследствие большого числа взаимосвязанных степеней свободы поведение таких систем во времени, как правило, описывается сложными иррегулярными функциями неаналитического вида, близкими по форме к стохастическим процессам и требующими применения адекватных методов анализа.

Общая математическая теория БИС [3,4,5] показывает, что количественный анализ поведения таких систем с необходимостью должен основываться на специфических критериях, адекватно учитывающих масштабно-инвариантный (фрактальный) способ организации процессов, протекающих в БИС. Под масштабной инвариантностью в контексте этой теории понимается эквивалентность статистических характеристик БИС, относящихся к разным диапазонам временных или функциональных масштабов, выраженная в различного рода степенных зависимостях вида $A \propto B^c$, где A – та или иная статистическая характеристика, B – параметр масштаба (период времени, частота, диапазон значений исследуемого процесса), c – степенной показатель [6]. Фрактальный анализ временных рядов позволяет анализировать процессы со слабыми корреляционными связями, что делает возможным найти закономерности в процессах, неанализируемых стандартными методами [7,8,9].

Степенные показатели БИС могут рассматриваться как макроскопические параметры состояния БИС, определяющие степень ее устойчивости по отношению к изменениям тех или иных внешних факторов, что находит подтверждение при анализе фрактальной структуры различных сложных многокомпонентных нелинейных систем. Однако, несмотря на успехи в области теоретического и модельного изучения БИС, применение этого подхода во многих прикладных областях только начинается [10,11,12].

В настоящей работе впервые приводятся результаты фрактального анализа динамики показателей функционирования государственной налоговой системы - поступления налогов в районах г. Санкт-Петербурга. Цель исследования состоит в оценке уровня стабильности поступлений и сравнительном сопоставлении финансовой устойчивости районов города в терминах теории статистических фракталов. При анализе структуры данных использованы две группы методов, нацеленных на определение устойчивости периода в поступлениях и оценку стабильности уровня поступлений. Полученные результаты позволяют построить двухмерную схему экономической стабильности региона как БИС и выявить ряд практически важных закономерностей в его внутренней организации. Предпринята также попытка выявить закономерности во временном ряде, соответствующем расходной составляющей бюджета, что необходимо для решения задачи согласования бюджетных потоков.

Методика

В работе исследованы временные ряды ежедневных поступлений *x(t)* в бюджет районов Санкт-Петербурга за период с января 1996 по март 1997 гг. С целью минимизации корреляционных искажений были сохранены точки временных рядов с $x=0$, соответствующие праздникам и выходным дням.

Для оценки автокорреляционной структуры временных рядов нами использовался стандартный спектральный подход, а также фрактальные методы – метод Херста и метод Пенга. Исследование вероятности редких событий в анализируемых выборках проводилось по методу Парето, также относящемуся к фрактальным методам, и с помощью статистики выбросов.

Спектральный метод. Для анализа частотной структуры временного ряда нами использовался спектр мощности *P(f)*, определяемый соотношениями

$$X(f,T) = \int_{t=0}^{T} x(t)\, e^{i2\pi f t}\, d\, t,$$

$$P(f) = (1/T)\, |X(f,T)|^2 ,$$

где f –частота, *X(f,T)* – Фурье-образ от временного ряда x(t), T - период наблюдения [6,13]. Метод является общепринятым при анализе периодических зависимостей на фоне шума, однако требует стационарной структуры временного ряда.

В качестве программной реализации спектрального метода нами применялся стандартный алгоритм быстрого преобразования Фурье.

Метод Херста (метод нормированного размаха). Один из общепринятых параметров фрактальной структуры временного ряда является индекс Херста, определяемый с помощью метода нормированного размаха [7,6,15]. Метод основан на разбиении ряда на непересекающиеся отрезки разной длины. Для каждого из отрезков строится вспомогательный ряд – накопленное отклонение:

$$\Omega(t,\tau) = \sum_{t^*=t_0}^{t} (x(t^*) - \langle x \rangle_\tau) \qquad ()$$

(τ - длина рассматриваемого отрезка, t_0 – его левая граница, $\langle x \rangle_\tau$ - среднее значение x на периоде τ), с помощью которого определяется размах $R(\tau)$:

$$R(\tau)=\Omega(t,\tau)_{max} - \Omega(t,\tau)_{min}.$$

Далее размах нормируется на величину стандартного отклонения S переменной x для того же участка ряда, которое вычисляется как:

$$S(\tau) = \sum_{t^*=t_0}^{t_0+\tau} (x(t^*) - \langle x \rangle_\tau)^2$$

Указанные выше формулы применяются к каждому из интервалов исследуемой длины, после чего получают усредненную оценку нормированного размаха R/S как характеристику масштаба τ. Зависимость $R/S(\tau)$ для фрактальных временных рядов имеет

$$R/S = (\tau/2)^H,$$

где H - индекс Херста. Значения H которого обычно лежат в области от 0 до 1. Индекс Херста отличается высокой чувствительностью к наличию и характеру слабых корреляционных зависимостей в структуре ряда. При $H>½$ данные содержат положительную автокорреляцию, при $H<½$ – отрицательную, в случае $H=½$ корреляции отсутствуют, и временной ряд может рассматриваться как полностью случайный процесс. С позиций теории БИС последний случай соответствует минимуму устойчивости системы, поскольку подразумевает отсутствие положительных и отрицательных обратных связей. Геометрическая трактовка H определяется его связью с фрактальной размерностью D для ряда накопленных отклонений: $D=2-H$. Соответственно, при $H=1$ размерность $D=1$, и график $\Omega(t)$ имеет вид гладкой одномерной “почти дифференцируемой” линии. При $H=0$ D равна двум, и функция $x(t)$ выглядит как двумерная “полоса” с размерностью плоскости построения. В промежуточных случаях размерность становится дробной, и временной ряд может быть отнесен к самоаффинным фракталам [7].

Метод Пенга (detrended fluctuation analysis). Как и метод нормированного размаха, метод Пенга связан с разделением ряда на фрагменты различной длины. Особенность метода состоит в вычитании из каждого анализируемого фрагмента временного ряда линейного тренда, что позволяет повысить точность в условиях низкочастотных помех и при ограниченных объемах выборок [10,12,14].

Для исходного процесса $x(t)$ вычисляется среднее $\langle x \rangle$ и строится вспомогательный ряд (сумма с переменным верхним пределом от центрированного исходного ряда):

$$y(t) = \sum_{i=1}^{t} (x(i) - \langle x \rangle)$$

Далее y_t делится на равные участки длиной τ, пронумерованные индексом n. Для каждого из таких участков по формулам линейной регрессии вычисляются координаты прямой y_t^n, соответствующей локальному линейному тренду. Определяется стандартное отклонение $F(\tau,n)$ значений ряда y_t относительно локального тренда y_t^n для каждого участка n:

$$F(\tau,n) = \sqrt{(\Sigma([y_t - y_t^n]^2)/\tau)},$$

где сумма берется по всем моментам t, принадлежащим n-му участку. Вслед за этим вычисляется среднее по всем участкам значение F. Описанные процедуры повторяются для разных по длине фрагментов ряда, что дает усредненную зависимость $F(\tau)$. Известно, что если функция $F(\tau)$ имеет степенной вид ($F \sim T^\delta$), то анализируемый временной ряд является фрактальным. Его структура отражается показателем δ (индексом Пенга) следующим образом: при $\delta = 0.0 - 0.5$ как исходный процесс $x(t)$, так и его приращения $\Delta x(t)$ демонстрируют отрицательные автокорреляции; при $\delta =$

0.5 - 1.5 корреляции $x(t)$ положительны, а $\Delta x(t)$ – отрицательны; при δ = 1.5 - 2.0 оба процесса имеют положительную автокорреляцию.

Если в ряде присутствует периодическая компонента с периодом T_0, то значение индекс δ, определяемое по графику $F(T)$, слева от T_0 становится больше, чем справа. Этот критерий может использоваться для обнаружения циклических составляющих в структуре сильно нестационарных временных рядов.

Метод Парето. Функции распределения параметров БИС описывается степенными зависимостями, известными в экономической статистике как распределения Парето [16]. Применительно к анализу бюджетных потоков эмпирический закон Парето предполагает, что, начиная с некоторого достаточно высокого значения $x=x^*$, число случаев N, при которых налоговые поступления превысили уровень x, должно спадать обратно пропорционально x в дробной степени α:

$$N(x) \sim N^{\alpha}$$

Численная величина индекса Парето α играет существенную роль при оценке статистической устойчивости экономических данных. Нетрудно показать, что в случае $\alpha < 1.0$ невозможно оценить математическое ожидание исследуемой выборки. При $1.0 < \alpha < 2.0$ среднее значение определено, однако отсутствует второй момент - стандартное отклонение SD_x. Устойчивая статистика, предполагающая возможность надежного определения среднего значения и оценки его доверительного интервала, наблюдается лишь в случае $\alpha > 2.0$.

Статистика выбросов. В качестве выбросов нами рассматривалось подмножество значений $\{x^*(t)\}$ временного ряда, определяемое условием $x^*(t) > \langle x\rangle + 3\sigma$, где $\langle x\rangle$ - среднее значение, σ - стандартное отклонение ряда. В качестве простой численной характеристики относительного веса таких событий в анализируемых данных мы выбрали отношение Q суммы налоговых поступлений в периоды выбросов к полной сумме поступлений: $Q = \Sigma x^*(t) / \Sigma x(t)$.

Результаты и обсуждение.

С использованием описанных выше алгоритмов нами был проведен анализ имеющихся данных по динамике бюджетных поступлений, направленный на выявление районов города с высоким и низким уровнями системной устойчивости, а также определение связи фрактальных индексов со средними показателями экономической активности районов.

Метод спектрального анализа позволил выявить отчетливую периодичность на масштабе 7, 30 и 90 суток в динамике налоговых поступлений большинства районов (Рис. 1), что объясняется соответственно выходными днями, когда не проводятся финансовые операции (нулевые значения параметра), плановыми месячными отчислениями в бюджет (кроме Василеостровского и Калининского районов) и квартальными перерасчетами. Этот результат соответствует предположению о планомерности поступлений налогов в бюджет, так как каждое предприятие имеет определенный график перечислений. Однако однозначно планомерные отчисления, позволяющие оценить время поступлений в бюджет, выполняются только в Кировском районе и Центр-2. Кроме того, в половине районов наблюдаются периодичности на масштабах 10, 15 и 45 дней, свидетельствующие о нерегулярности поступлений, вероятно, связанной с увеличением объемов отчислений к концу кварталов. Таким образом, на основании применения только спектрального метода нельзя однозначно сделать вывод о существовании тридцатидневного периода в рассматриваемых данных.

Для количественной оценки устойчивости наиболее важного из перечисленных выше периодов поступлений – 30-дневного периода – нами были применены фрактальные методы анализа.

С помощью метода Херста было установлено, что в большинстве случаев зависимость R/S от периода времени τ содержит два участка с разным наклоном (Рис. 2). Соответствующие этим участкам значения индекса Херста варьировали в пределах от H_1=0,50…0,63 (τ <30 дней) и от H_2=0,46…0,88 (τ >30 дней), что говорит на наличие 30-дневного периода при персистентном поведении временных рядов в целом. Устойчивость периода отдельно выделенного временного ряда подразумевает по крайней мере выполнение условия $H_1>H_2$ (положительные корреляции "внутри" цикла выражены сильнее корреляций вне цикла). Пользуясь этим критерием, к районам с устойчивым 30-дневным периодом можно отнести районы Центр-2, Павловский, Колпинский и Кировский (Рис. 3). Необходимо отметить, что строгим признаком устойчивого периода служит условие H_1>0.5, H_2<0.5, которое не выполняется ни для одного из районов. Этот результат может быть обусловлен трендами в анализируемых временных рядах, приводящими к завышенным оценкам обоих индексов.

Использование метода Пенга, менее чувствительного к низкочастотным помехам в форме трендов, подтверждает наличие устойчивых 30-дневных периодов во временных рядах налоговых поступлений. Значения индекса Пенга δ оценивались на масштабах неделя – месяц (δ_1) и месяц-квартал (δ_2). В среднем по городу индекс δ_1 оказывался достоверно выше индекса δ_2 (соответственно 0.61±0.03 и 0.52±0.05, p=0.05), что говорит о сравнительно высоком уровне автокорреляции на внутримесячном масштабе. К районам с высокими значениями δ_1 (δ_1>0.65) относятся Московский, Красногвардейский, Василеостровский, Курортный районы, а также район Центр-1. В двух из этих районов – Московском и Центр-1 наблюдаются также высокие значения индекса δ_2. Районы с устойчивым 30-дневным периодом налоговых поступлений могут быть определены по критерию δ_1>0,5; δ_2<0,5. Это Кировский, Красногвардейский, Центр-2, Невский, Павловский и Василеостровский районы. В районах с $\delta_1<\delta_2$ (Пушкинский, Ломоносовский и Выборгский) месячная периодичность поступлений была крайне неустойчива.

При анализе данных по методу Пенга обнаруживается также тенденция к усилению положительных автокорреляций в исследуемых рядах с возрастанием среднего суточного объема K налоговых поступлений. Так, средневыборочное значение δ_1 для районов с K<350 составляет 0.54±0.03, в то время как для районов с 350<K<800 δ_1=0.65±0.03 (p=0.05). Эта тенденция может быть связана с возрастанием системной сложности и уровня интеграции экономики района при увеличении его финансово-экономической активности. Исключением из этой закономерности являются два района с рекордно высоким объемом отчислений – Адмиралтейский и Центр-1, что может быть связано с их особой экономической организацией.

Специального внимания заслуживает также структура внеплановых поступлений, ассоциируемых с резкими «выбросами» во временных рядах. Статистика этих сравнительно редких событий, не имеющих выраженного периода, наиболее адекватно отражается функцией распределения Парето. Анализ распределений показывает, что для большинства районов спадание вероятности редких событий имеет алгебраический вид. В среднем по районам индекс Парето за исследованный период времени составил величину 1.86±0.13 (p=0.05), что указывает на стабильность объема налоговых поступлений в городской бюджет для периода в целом. В то же время на основе критерия α>2.0 к группе относительно устойчивых районов могут быть отнесены Кировский, Курортный, Колпинский и Невский районы. Рекордно высокие значения индекса Парето (α=2.4), наблюдаются в данных Пушкинского и Ломоносовского районов. Неудовлетворительной статистической устойчивостью (α<1.6) характеризуется динамика поступлений Петродворцового и Петроградского районов.

Наиболее важная область применения метода Парето состоит в том, что индекс α может использоваться в целях статистического прогноза наиболее редких "катастрофических" изменений состояния временного ряда, крайне нежелательных с точки зрения планирования бюджета. Высокие значения α указывают на низкую вероятность подобных событий, низкие значения – на высокую. Сравнение значений α с показателем высоты выбросов Q показывают, что такая зависимость действительно имеет место: в большинстве случаев районы с высокими значениями α демонстрируют меньший уровень Q (Рис. 4).

Представляет интерес и сопоставление значения индекса Парето, как показателя статистической устойчивости налоговых поступлений, с величинами $(\delta_1-\delta_2)/\delta_2$ и $(H_1-H_2)/H_2$, позволяющими оценить их динамическую устойчивость. Анализ данных показывает, что за исключением районов с низким средним уровнем поступлений, таких, как Колпинский, Ломоносовский, Пушкинский и Петродворцовый, можно говорить о наличии отчетливой положительной корреляции исследуемых характеристик: увеличение α сопровождается увеличением различий индексов Пенга и Парето на масштабах времени длиннее и короче месяца, что, как отмечалось выше, соответствует появлению устойчивого 30-дневного цикла. Таким образом, статистическая устойчивость связана, хотя и не всегда неоднозначно, с динамической устойчивостью, выраженной в корреляционной структуре данных. К районам с высоким уровнем обоих параметров относятся Центр-2, Кировский, Красносельский, Курортный, Невский и Адмиралтейский. Следует отметить, что для двух из этих районов (Кировского и Центр-2) периодичности выявлены и с помощью спектрального метода.

Заключение и выводы

Таким образом, динамика исследованных налоговых поступлений в районах Санкт-Петербурга обладает сложной структурой, включающей как периодические, так и случайные компоненты.

Наличие периодичностей на масштабе 30 дней было подтверждено с применением трех различных методов – спектрального, метода нормированного размаха и метода Херста. Анализ полученных зависимостей позволил выделить группы районов с низкой и высокой устойчивостью одномесячного периода поступлений. Кроме этого, с использованием метода Парето и статистики выбросов исследована устойчивость среднего объема поступлений и выявлены районы с повышенной вероятностью резких скачков внеплановых отчислений.

С точки зрения теории больших интерактивных систем, полученные данные свидетельствует о том, что за исследованный период времени структура городского бюджета находилась в стадии формирования, хотя и удовлетворяла многим важным критериям экономической самоорганизации, выраженным, в частности, в степенной форме распределения Парето и фрактальной организации крупномасштабных корреляций. По мере дальнейшего развития экономики города можно ожидать закрепления этих тенденций и появления признаков стабильных поступлений в активности большего числа районов.

Исследованные в работе математические критерии могут использоваться в целях экспресс-анализа и составления текущих экономических прогнозов в широком диапазоне временных масштабов, что перспективно для улучшения планирования деятельности финансовых органов на уровне районов и города в целом.

Литература

1. О.Ю.Урицкая. Перспективы применения фрактальных методов анализа к исследованию апериодических колебательных процессов в экономике. В сб. Современные проблемы и методы совершенствования управления. СПб.:Изд-во СПбГТУ, 1997. С 142 – 149.
2. О.Ю.Урицкая, А.В.Федотов. О применении теории самоорганизованной критичности в моделировании сложных экономических систем. СПб.:Изд-во СПбГТУ, 1998.
3. Bak P, Tang C., and Wiesenfeld K, Self-Organized Criticality: an Explanation of 1/f Noise // Phys. Rev. Lett. 1987. v.59. p.381-384.
4. P.Bak, M.Paczuski, M.Shubik. Price Variations in a Stock Market with Many Agents. Physica A, 1997, vol.246, p.430-453.
5. Bak P, How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality. Oxford: Oxford University Press, 1997.
6. Т.Федер. Фракталы. М.: Мир, 1991.
7. E.E.Peters. Fractal Structure in the Capital Markets. Financial Analysts Jornal, july-august 1989, p.32-37.
8. E.E.Peters. Chaos and Order in the Capital Markets: a New View of Cycles, Prices, and Market Volatility. New York: John Wiley, 1991.
9. H.E.Stanley, L.A.N.Amaral, D.Caning et al. Econophysics: Can Physicists Contridute to the Science of Economics? Physica A, 1999, vol.269, p.156-169.
10. I.M.Janosi, B.Jaecsko, I.Kondor. Statistical Analysis of 5 s Index Data of the Budapest Stock Exchange. Physica A, 1999, vol.269, p.111-124.
11. О.Ю.Урицкая. Основы теории экономического риска: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ,

1999.
12. K.Ivanova. Toward a phase diagram for stocks. Physica A, 1999, vol.270, p.567-577.
13. B.D.McCullough. A Spectral Analysis of Transactions Stock Market Data. The Financial Review, November 1995, vol.30, N4, p.823-842.
14. S.V.Buldyrev, N.V.Dokholyan, A.L.Goldberger et al. Analysis of DNA Sequences Using Methods of Statistical Physics. Physica A, 1998, vol.249, p. 430 – 438.
15. G.Papaioannou. Nonlinear Time Series Analysis of the Stock Exchange: the Case of an Emerging Market. International Jornal of Bifurcation and Chaos, 1995, vol.5, N 6, p.1557-1584.
16. M.Pasquini, M.Serva. Multiscaling and Clustering of Volatility. Physica A, 1999, vol.269, p.140-147.

Иллюстрации

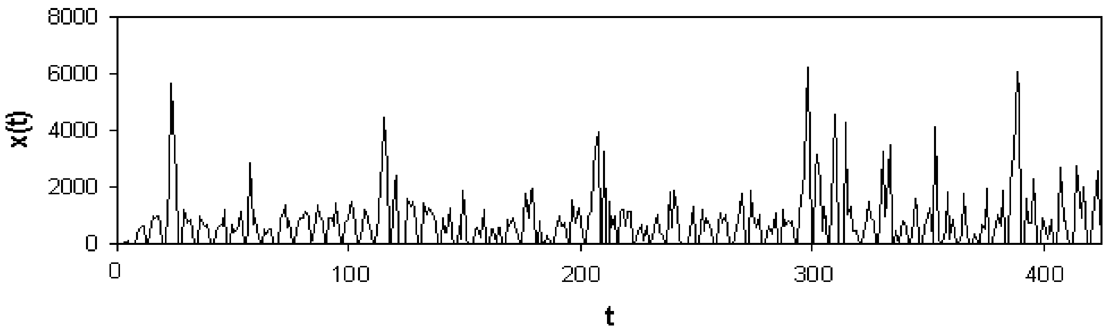
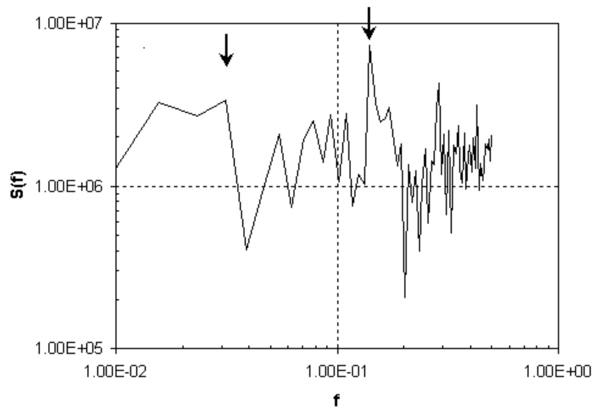


Рис.1. Пример временного ряда налоговых поступлений (вверху) и его спектра мощности (справа). На спектре стрелками показаны две основных гармоники, соответствующие периодам 7 и 30 суток (данные Московского района).



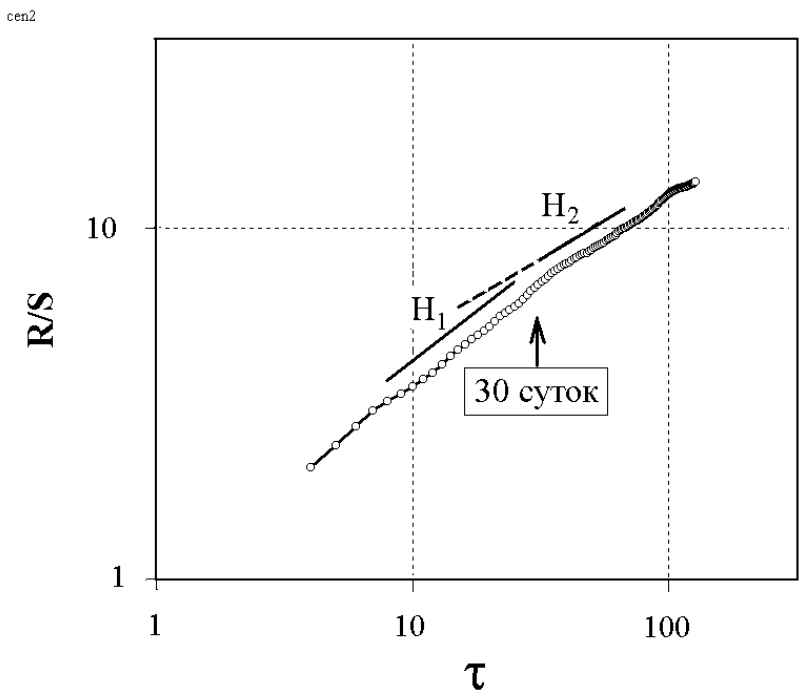


Рис.2. Пример графика нормированного размаха *R/S* как функции временного масштаба *T*, показывающий два участка с разными значениями индекса Херста (данные района Центр-2)

Рис.3. Распределение значений индексов Херста H_1 и H_2 по районам. Условие $H_1 > H_2$, соответствующие устойчивому 30-дневному периоду налоговых поступлений, соблюдается для районов Павловский, Центр-2, Кировский и Колпинский.

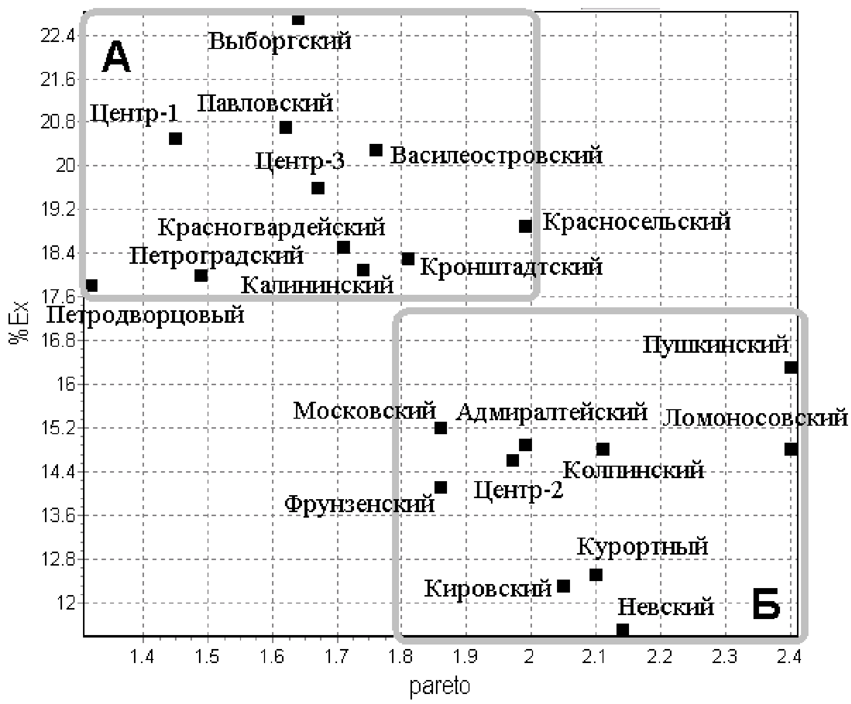


Рис.4. Зависимость уровня внеплановых поступлений от индекса Парето. Группа А соответствует районам с низкой устойчивостью среднего уровня поступлений, группа Б - с высокой устойчивостью.