

# ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ БЮДЖЕТНЫХ ПОСТУПЛЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ АДМИНИСТРАТИВНЫХ РАЙОНОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА

О.Ю. Урицкая<sup>1</sup>, В.М. Урицкий<sup>2</sup>, А.В. Федотов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Кафедра управления в социально-экономических системах,  
Санкт-Петербургский государственный технический университет

<sup>2</sup>Кафедра Физики Земли, Санкт-Петербургский государственный университет

**Abstract.** We study fractal properties of temporal fluctuations of the volume of income taxes collected in St.Petersburg, Russia in 1996-1997. Time series of the tax inflows typically consist of periodic and stochastic components. We show that the main periodic component, which represents the 30-day economic cycle, is strongly influenced by random fluctuations. We estimate a degree of randomness and uncertainty in studied time series using E.Hurst's rescaled range analysis, detrended fluctuation analysis by C.K.Peng, as well as Pareto distribution method. Based on these fractal techniques, we quantify and compare dynamical stability of tax inflow dynamics in different administrative districts of the city. The results obtained suggest that fractal methods can give prognostic information on both stochastic and deterministic aspects of the behavior of complex economic systems with many degrees of freedom.

Городская бюджетная структура на уровне районов, каждый из которых включает десятки больших и малых предприятий, действующих по законам рынка и вносящим свой вклад в районный и муниципальный бюджет, с формальной точки зрения может быть отнесена к категории больших интерактивных систем (БИС) [1-2]. Как показывает математический анализ БИС [3-5], одна из общих закономерностей организации систем этого класса состоит в стохастической масштабно-инвариантной эволюции интегральных параметров состояния. Масштабная инвариантность динамики БИС требует привлечения фрактальных методов анализа, способных адекватно оценить поведение статистических характеристик системы в широком диапазоне временных и функциональных масштабов [6].

Применительно к экономическим БИС фрактальный подход позволяют успешно выявить скрытые корреляционные связи в динамике различных рыночных показателей, необнаружимые стандартными статистическими методами [7-10]. В ряде случаев фрактальные характеристики оказываются также важными параметрами макросостояния экономической системы, определяющими ее глобальную устой-

чивость по отношению к изменениям внешних и внутренних факторов [11,12].

В настоящей работе впервые проводится анализ фрактальной динамики одного из показателей функционирования государственной налоговой системы – доходной составляющей бюджета административных районов г. Санкт-Петербурга. Цель исследования состоит в оценке регулярности налоговых поступлений и сравнительном сопоставлении финансовой стабильности районов города. Полученные результаты позволяют выявить ряд практически важных закономерностей в динамике исследуемых бюджетных потоков.

Нами исследованы временные ряды ежедневных налоговых отчислений в бюджет основных административных районов Санкт-Петербурга за период с января 1996 по март 1997 г. Для оценки частотной структуры временных рядов использовался стандартный метод преобразования Фурье [13]. Фрактальная структура рядов анализировалась с помощью метода нормированного размаха Херста [6] и метода Пенга [14]. Исследование вероятности редких событий проводилось по методу Парето [11] и с помощью статистики выбросов.

Спектральный анализ Фурье позволил выявить периодические гармоники на масштабе 7, 30 и 90 суток в динамике налоговых поступлений большинства районов, что объясняется соответственно выходными днями, когда не проводятся финансовые операции, плановыми месячными отчислениями в бюджет и квартальными перерасчетами. Однако однозначно планомерные отчисления выполняются только в двух районах (Кировском и Центр-2). Для динамики остальных районов характерен высокий уровень флуктуаций и дополнительные периодичности на масштабах 10, 15 и 45 дней, отражающие существенные нарушения графика поступлений.

С учетом значительного уровня флуктуаций в исследуемых данных, для оценки устойчивости наиболее важного из перечисленных выше периодов поступлений – 30-дневного периода – нами были использованы фрактальные методы анализа.

Метод нормированного размаха позволяет определить фрактальный параметр  $H$  (индекс Херста), который характеризует корреляционную структуру случайного временного ряда как функцию временного масштаба. Если, помимо флуктуаций, временной ряд содержит циклическую составляющую с устойчивым периодом, следует ожидать, что  $H_1 > H_2$  (рис.1): положительные корреляции на интервалах времени короче длительности интересующего периода должны быть выражены сильнее корреляций вне цикла. Данные показали, что для некоторых районов города это условие действительно соблюдается (Рис. 2), однако основная часть районов не демонстрируют устойчивого 30-дневного периода. Более строгий критерий периодической динамики ( $H_1 > 0.5$ ,  $H_2 < 0.5$ ) не выполняется ни для одного из исследованных временных рядов, что отчасти может объясняться длительными трендами в масштабах года, приводящими к систематическому завышению оцениваемых индексов.

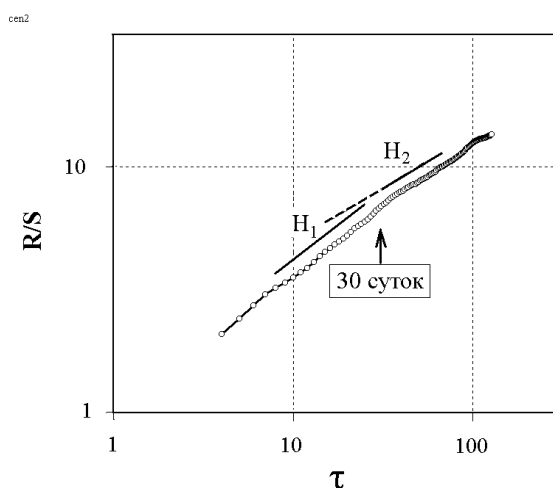


Рис.1. Зависимость нормированного размаха  $R/S$  от временного масштаба  $\tau$  (данные района Центр-2), показывающая разные значения индекса Херста на масштабах короче и длиннее 30-суточного периода.



Рис.2. Распределение значений индексов  $H_1$  и  $H_2$  по районам города. Условие  $H_1 > H_2$ , соответствующее устойчивому 30-дневному периоду налоговых поступлений, соблюдается для районов Павловский, Центр-2, Кировский и Колпинский.

Использование метода Пенга, дающего более надежную информацию о корреляционной структуре фрактального ряда при наличии низкочастотных трендов, позволило уточнить степень устойчивости 30-дневного периода в исследуемых бюджетных потоках. Аналогично индексу Херста, значения индекса Пенга  $\delta$  оценивались нами на временных масштабах неделя–месяц ( $\delta_1$ ) и месяц–квартал ( $\delta_2$ ). Анализ показал, что в среднем по городу величина  $\delta_1$  достоверно превышает

величину  $\delta_2$  (соответственно  $0.61 \pm 0.03$  и  $0.52 \pm 0.05$ ,  $p=0.05$ ), что говорит о сравнительно более высоком уровне автокорреляций в пределах одного месяца. Показательно, что отчетливо выраженный 30-дневный период поступлений ( $\delta_1 > 0.5$ ;  $\delta_2 < 0.5$ ) наблюдается лишь в экономически развитых административных районах, составляющих приблизительно одну треть от исследованной выборки. В экономически слабых районах долговременные тенденции доминируют над месячной периодичностью ( $\delta_1 < \delta_2$ ).

Зависимость устойчивости 30-дневного периода от уровня экономического развития района была подтверждена при сопоставлении индекса Пенга со среднесуточным объемом  $K$  налоговых поступлений. Для районов с  $K < 350$  среднее значение параметра  $\delta_1$  составило величину  $0.54 \pm 0.03$ , в то время как для районов с  $350 < K < 800$  этот параметр составил  $0.65 \pm 0.03$  ( $p=0.05$ ). Выявленная зависимость может быть обусловлена возрастанием системной интеграции экономики района при увеличении его финансово-экономической активности.

Специального внимания заслуживает динамика внеплановых поступлений, связанных со случайными резкими выбросами в исследуемых временных рядах. Статистика этих событий может быть описана с помощью куммулятивной функции распределения Парето. Данные показали, что для большинства районов спадание вероятности редких событий имеет степенной вид, характерный для динамики бифуркаций в рыночных экономических системах [5,11]. В среднем по городу значение степенного показателя функции распределения (индекса Парето  $\alpha$ ) составило величину  $1.86 \pm 0.13$  ( $p=0.05$ ), что указывает на стабильность общего объема налоговых поступлений в городской бюджет ( $\alpha > 1$ ) и неопределенность границ вариаций этого объема ( $\alpha < 2$ ). Применительно к каждому из районов, индекс  $\alpha$  может использоваться в целях статистического

прогноза наиболее редких "катастрофических" изменений объемов налоговых поступлений. Для сравнения уровня значимости таких событий между районами мы использовали величину  $\Sigma\{x^*\}/\Sigma x(t)$ , где  $x(t)$ -исходный временной ряд,  $\{x^*\}$  - подмножество его значений, определяемое условием  $x^*(t) > \langle x \rangle + 3\sigma$ ,  $\langle x \rangle$  - среднее значение ряда,  $\sigma$  - его стандартное отклонение. Согласно полученным нами данным, в большинстве случаев районы с высокими значениями  $\alpha$  отличаются меньшим уровнем выбросов (Рис.3). Напротив, низкое значение индекса Парето указывает на повышенную вероятность резкого изменения уровня налоговых поступлений, нежелательного с точки зрения планирования бюджета, и дает основания для неблагоприятного прогноза.

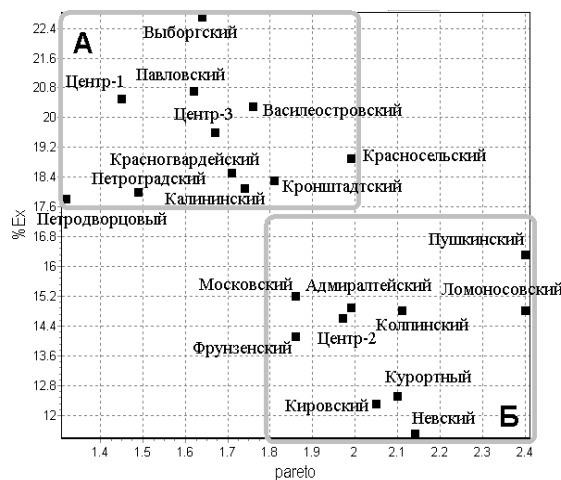


Рис.3. Зависимость уровня внеплановых поступлений от индекса Парето  $\alpha$ . Группа А соответствует районам с низкой устойчивостью среднего уровня поступлений, группа Б - с высокой устойчивостью.

В соответствии с полученными выше данными, величины  $\delta_1$ - $\delta_2$  и  $H_1$ - $H_2$  могут рассматриваться как характеристики динамической устойчивости налоговых поступлений, в то время как индекс  $\alpha$  оценивает их статистическую устойчивость. Закономерно ожидать, что эти аспекты поведения бюджетных потоков связаны между собой. Регрессионный анализ

показал, что за исключением районов с низкими значениями  $K$ , увеличение индекса  $\alpha$  сопровождается достоверным возрастанием разницы индексов Пенга и Парето на масштабах времени меньше и больше месяца, что соответствует стабилизации 30-дневного периода налоговых поступлений. Таким образом, в районах с развитой экономикой статистическая устойчивость бюджетного потока положительно коррелирует с его динамической устойчивостью.

Результаты проведенного анализа показывают, что динамика налоговых поступлений в административных районах Санкт-Петербурга характеризуется сложной структурой, включающей как периодическую, так и случайную компоненты. Используемые фрактальные методы позволили выделить группы районов с низкой (Рис.3, группа А) и высокой устойчивостью (Рис.3, группа Б), выявить районы с плохо выраженной 30-дневной периодичностью и высокой вероятностью внеплановых налоговых отчислений. Предложенные нами математические критерии могут использоваться в целях экспресс-анализа и составления текущих экономических прогнозов в широком диапазоне временных масштабов, что перспективно для улучшения планирования деятельности финансовых органов на уровне районов и города в целом.

С более общей точки зрения полученные данные свидетельствуют о том, что за исследованный период времени структура городского бюджета находилась в начальной стадии формирования, хотя и удовлетворяла многим важным критериям экономической динамики возникающего рынка [15], выраженным, в частности, в степенной форме распределений Парето и фрактальной временной организации динамики финансовых потоков.

## Литература

1. О.Ю.Урицкая. Перспективы применения фрактальных методов анализа к исследованию аperiodических колебательных процессов в экономике. В сб.: Современные проблемы и методы совершенствования управления. СПб.:Изд-во СПбГТУ, 1997. С 142 – 149.
2. О.Ю.Урицкая, А.В.Федотов. О применении теории самоорганизованной критичности в моделировании сложных экономических систем. СПб.:Изд-во СПбГТУ, 1998.
3. P.Bak, C.Tang, K. Wiesenfeld. Self-Organized Criticality: an Explanation of  $1/f$  Noise. Phys. Rev. Lett., 1987, vol.59. p.381-384.
4. P.Bak, M.Paczuski, M.Shubik. Price Variations in a Stock Market with Many Agents. Physica A, 1997, vol.246, p.430-453.
5. P.Bak. How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality. Oxford: Oxford University Press, 1997.
6. Т.Федер. Фракталы. М.: Мир, 1991.
7. E.E.Peters. Fractal Structure in the Capital Markets. Financial Analysts Journal, July-August 1989, p.32-37.
8. E.E.Peters. Chaos and Order in the Capital Markets: a New View of Cycles, Prices, and Market Volatility. New York: John Wiley, 1991.
9. H.E.Stanley, L.A.N.Amaral, D.Caning et al. Econophysics: Can Physicists Contribute to the Science of Economics? Physica A, 1999, vol.269, p.156-169.
10. I.M.Janosi, B.Jaecsco, I.Kondor. Statistical Analysis of 5 s Index Data of the Budapest Stock Exchange. Physica A, 1999, vol.269, p.111-124.
11. О.Ю.Урицкая. Основы теории экономического риска: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.
12. K.Ivanova. Toward a phase diagram for stocks. Physica A, 1999, vol.270, p.567-577.
13. B.D.McCullough. A Spectral Analysis of Transactions Stock Market Data. The Financial Review, November 1995, vol.30, N4, p.823-842.
14. S.V.Buldyrev, N.V.Dokholyan, A.L.Goldberger et al. Analysis of DNA Sequences Using Methods of Statistical Physics. Physica A, 1998, vol.249, p. 430 – 438.
15. G.Papaioannou. Nonlinear Time Series Analysis of the Stock Exchange: the Case of an Emerging Market. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1995, vol.5, N 6, p.1557-1584.